

2. Výroková logika

Osnova: výrok, negace výroku, pravdivostní hodnota výroku; kvantifikované výroky; složené výroky, logické spojky; výroková formule, tautologie; obrácení, obměna implikace; výroková forma, matematická věta

SMP 143/4, 144/8, 10, (12), (13)

4. Zapište si vhodné záhlaví tabulky, ve které zapíšete pravdivostní ohodnocení formulí:
a) $[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$ b) $[(A \Rightarrow B) \wedge B'] \Rightarrow A'$
K jakému zjištění docházíte?
8. Na modelu kolejíště je možno uvést do pohybu tři vlakové soupravy A,B,C. V daném okamžiku je jejich situace charakterizována formulí $[(A' \vee B') \Rightarrow C] \wedge [(A \vee C) \Rightarrow B']$. Které soupravy jsou v pohybu? (**X** – vlaková souprava X je v pohybu; **X'** – vlaková souprava X je v klidu.)
10. Květa si pozvala na oslavu svých osmnáctin přátele. Uvažuje takto:
a) Alena a Boris chodí vždycky spolu. Přijdou oba, nebo ani jeden.
b) Přijde Boris nebo Dan, ale určitě ne oba.
c) Když přijde Alena, pak přijde i Eva.
d) Když Eva nepřijde, nepřijde Dan.
S jakým největším počtem přátel může Květa počítat? Vyplyvá z Květiny úvahy, že může nastat situace, kdy nepřijde ani jeden z pozvaných?
12. Trenér se věnuje trojici gymnastů – Adamovi, Břetovi a Čenkovi. Rozhodněte, koho vyšle na kontrolní závod, jestliže splní tyto tři podmínky:
Tělovýchovnou jednotu budou reprezentovat nejvýše dva závodníci, přitom pojede aspoň jeden.
Pojede Adam nebo Čenek, ale určitě ne oba současně.
Nepojede-li Čenek, pak nepojede ani Břet.
13. V souvislosti s otevřením další části metra uvažuje komise o účelnosti autobusových linek A, B, C, D. Je přitom třeba vzít v úvahu tyto tři skutečnosti:
Aspoň jedna z linek A, B, C bude zrušena.
Bude-li zrušena linka A, pak bude zachována linka B nebo D.
Nebude-li zrušena linka C, pak bude zrušena linka A nebo D.
Najděte všechna řešení a rozhodněte, zda stačí zachovat jen jednu z linek.

ŘMÚ 274/28.5, (275/28.6)

28.5

- a) K implikaci „jestliže funkce f má v každém bodě intervalu $(a;b)$ kladnou derivaci, pak funkce f je v intervalu $(a;b)$ rostoucí“ utvořte negaci, obměněnou a obrácenou implikaci a stanovte jejich pravdivostní hodnoty.
- b) Negujte výroky:
1. Aspoň jeden příklad jsem vyřešil správně.
2. V tomto sadě je aspoň dvacet jabloní.
3. Nejvýše šest žáků naší třídy prospělo s vyznamenáním.
4. Každý den vstávám v sedm hodin.
- c) Když si dám kávu, dám si i moučník. Nedám-li si zmrzlinu, nedám si moučník.
1. Vyplyvá z uvedeného, že dám-li si zmrzlinu, pak si nedám kávu?
2. Vyplyvá z uvedeného, že když si dám kávu, dám si i zmrzlinu?

28.6

- a) K implikaci „Je-li dané přirozené číslo dělitelné dvěma a zároveň třemi, pak je dělitelné šesti“ utvořte negaci, obměněnou a obrácenou implikaci.
- b) Nebude-li ráno pršet, pojedeme na chalupu. Zjistíme, že ráno prší. Usuzujeme správně, když z uvedeného odvodíme, že na chalupu nepojedeme?
- *c) Pro práci strojů A, B, C platí dvě podmínky: Nesmí pracovat pouze stroj B. Když pracuje stroj A, pak musí být v chodu i stroj B. Navrhněte síť, která bude pro tuto trojici strojů kontrolním zařízením a bude signalizovat nesplnění aspoň jedné z uvedených podmínek.

Důkaz matematickou indukcí

SÚM 240/1, 5, 8, 9, 18a,d (ostatní), (19), (20)

SMP 127/4, (5a), 6, 7a,d,f (ostatní), 8a,e

4. Matematickou indukcí dokažte Moivreovu větu: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

*5a. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ a $\sin \alpha \neq 0$ platí:

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$$

6. Kolik průsečíků má n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě? Správnost odpovědi dokažte matematickou indukcí.

7. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

a) $11 (2^{2n-1} + 3^{4n-2})$	b) $30 (7^{4n+1} - 7)$
c) $30 (11^{4n+1} - 11)$	d) $400 (401^{4n+1} - 401)$
e) $9 (7^n + 3n - 1)$	*f) $100 (7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4n-1} + 7^{4n})$

8. Posloupnost je dána rekurentně. Matematickou indukcí ověřte vzorec pro její n -tý člen; (vzorec je připojen):

a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}; (a_n = 2^{n-1} + 1)$
e) $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n + 1; (a_n = n^2 - 1)$